第10講　総合問題(2)

1　xy 平面上の 2 直線 L_1，L_2 を $L_1 : y=0$　(x 軸)，$L_2 : y=\sqrt{3}\,x$ で定める．P を xy 平面上の点とする．直線 L_1 に関して P と対称な点を Q，直線 L_2 に関して P と対称な点を R とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　P の座標を $(a,\ b)$ とするとき，R の座標を a，b を用いて表せ．

(2)　2 点 Q，R の距離が 2 になるような P の軌跡 C を求めよ．

(3)　点 P が C 上を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値とそれを与える P の座標を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　放物線 $y=x^2$ 上に 2 定点 A，B がある．P は放物線上で A と B の間にある点で，放物線と線分 AP とで囲まれる図形の面積 S_1 と，放物線と線分 PB とで囲まれる図形の面積 S_2 との和が最小になるようにとった点である．

(1)　S_1 と S_2 の比を求めよ．

(2)　点 P での放物線の接線に垂直な直線と，A，B を通る直線とのなす角を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 関数 $f(x)=x^3-x+\dfrac{2}{3}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が減少しない x の範囲を求めよ．

(2) 点Pが曲線 $y=f(x)$ 上を動くとき，x 軸の正の方向と点Pにおけるこの曲線の接線のなす角を θ とする．θ のとりうる値の範囲を求めよ．ただし，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) n を正の整数とし，$n \leqq x < n+1$ の範囲で $f(x)$ の値が整数となる x の個数を a_n とする．a_n を n を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

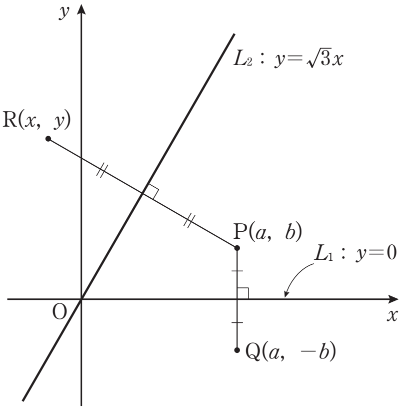
第 10 講　総合問題(2)

1　xy 平面上の 2 直線 L_1，L_2 を $L_1: y=0$　(x 軸)，$L_2: y=\sqrt{3}\,x$ で定める．P を xy 平面上の点とする．直線 L_1 に関して P と対称な点を Q，直線 L_2 に関して P と対称な点を R とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　P の座標を $(a,\ b)$ とするとき，R の座標を a，b を用いて表せ．

(2)　2 点 Q，R の距離が 2 になるような P の軌跡 C を求めよ．

(3)　点 P が C 上を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値とそれを与える P の座標を求めよ．



(1)　$\mathrm{R}(x,\ y)$ とおく．

$\mathrm{PR}\perp L_2$ より　$(x-a)\cdot 1+(y-b)\cdot\sqrt{3}=0$

よって　$x+\sqrt{3}\,y=a+\sqrt{3}\,b$　……①

PR の中点が L_2 上より　$\dfrac{y+b}{2}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{x+a}{2}$

よって　$\sqrt{3}\,x-y=-\sqrt{3}\,a+b$　……②

①，②より　$\mathbf{R}\left(\dfrac{-a+\sqrt{3}\,b}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}\,a+b}{2}\right)$

(2)　$\mathrm{P}(a,\ b)$ のとき　$\mathrm{Q}(a,\ -b)$

$$\mathrm{QR}^2=\left(\frac{-a+\sqrt{3}\,b}{2}-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}\,a+b}{2}+b\right)^2=3(a^2+b^2)$$

$\mathrm{QR}=2$　より　$3(a^2+b^2)=4$　　$a^2+b^2=\dfrac{4}{3}$

よって，求める軌跡 C は円　$\boldsymbol{x^2+y^2=\dfrac{4}{3}}$

(3)　$\mathrm{P}(a,\ b)$ のとき　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\times|2b|\times\left|a-\dfrac{-a+\sqrt{3}\,b}{2}\right|=\dfrac{1}{2}\left|b(3a-\sqrt{3}\,b)\right|$　この最大値を求める．

ここで，$a^2+b^2=\dfrac{4}{3}$ より　$a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$，$b=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$　とおく $(0\leqq\theta<2\pi)$

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta(2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta)\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\sqrt{3}\sin 2\theta-(1-\cos 2\theta)\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta-1\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-1\right|$$

$-1\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 1$ より　$0\leqq\triangle\mathrm{PQR}\leqq\sqrt{3}$　　よって　$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$

したがって　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ のとき　△PQR は最大値 $\sqrt{3}$ をとる．

このとき $\mathbf{P}\left(\pm\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}},\ \mp\mathbf{1}\right)$　(複合同順)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　放物線 $y=x^2$ 上に２定点 A，B がある．P は放物線上で A と B の間にある点で，放物線と線分 AP とで囲まれる図形の面積 S_1 と，放物線と線分 PB とで囲まれる図形の面積 S_2 との和が最小になるようにとった点である．

(1)　S_1 と S_2 の比を求めよ．

(2)　点 P での放物線の接線に垂直な直線と，A，B を通る直線とのなす角を求めよ．

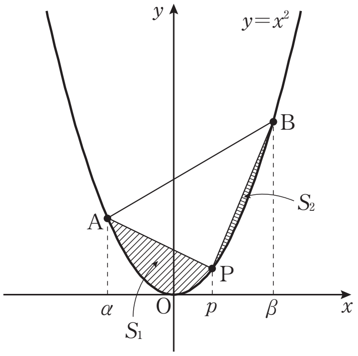
(1)　点 A，B，P の x 座標をそれぞれ α，β，p とする．$(\alpha<p<\beta)$

直線 AP の方程式は

$$y=\frac{p^2-\alpha^2}{p-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2 \quad \text{より} \quad y=(p+\alpha)x-p\alpha$$

$$S_1=\int_\alpha^p\{(p+\alpha)x-p\alpha-x^2\}dx$$

$$=\int_\alpha^p-(x-\alpha)(x-p)dx=\frac{1}{6}(p-\alpha)^3$$



同様に，直線 BP の方程式は

$$y=(p+\beta)x-p\beta \quad \text{であり} \quad S_2=\frac{1}{6}(\beta-p)^3$$

$$S_1+S_2=\frac{1}{6}\{(p-\alpha)^3+(\beta-p)^3\}$$

$$=\frac{1}{6}\{3(\beta-\alpha)p^2-3(\beta^2-\alpha^2)p+\beta^3-\alpha^3\}$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{6}\{3p^2-3(\beta+\alpha)p+\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2\}$$

これを p の２次関数と見ると，これが最小になるのは　$p=\dfrac{3(\beta+\alpha)}{6}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　のとき

このとき　$p-\alpha=\beta-p=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ より　$\boldsymbol{S_1:S_2=1:1}$

(2)　$y=x^2$ より　$y'=2x$

よって　$x=p=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　における法線の傾きは　$-\dfrac{1}{\alpha+\beta}$

また，直線 AB の傾きは　$\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta$

これらの積が -1 であることより，この２直線のなす角は **90°**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 関数 $f(x)=x^3-x+\dfrac{2}{3}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が減少しない x の範囲を求めよ．

(2) 点 P が曲線 $y=f(x)$ 上を動くとき，x 軸の正の方向と点 P におけるこの曲線の接線のなす角を θ とする．θ のとりうる値の範囲を求めよ．ただし，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) n を正の整数とし，$n\leqq x<n+1$ の範囲で $f(x)$ の値が整数となる x の個数を a_n とする．a_n を n を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ を求めよ．

(1) $f(x)=x^3-x+\dfrac{2}{3}$ より　$f'(x)=3x^2-1$

$f'(x)\geqq 0$ より　$3x^2-1\geqq 0$　　よって　$\boldsymbol{x\leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq x}$

(2) 点 P の x 座標を p とすると　$\tan\theta=f'(p)=3p^2-1$

$3p^2-1\geqq -1$ より　$\tan\theta\geqq -1$　これと　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}}$

(3) (1)より　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq x$ において $f(x)$ は単調増加である．

よって　$n\leqq x<n+1$（n：正の整数）において，x と $f(x)$ は 1：1 に対応する．

ゆえに　$f(n)\leqq f(x)<f(n+1)$　……①

これを満たす $f(x)$ の値のうち，整数となるものの個数が求める a_n である．

①より　$n^3-n+\dfrac{2}{3}\leqq f(x)<(n+1)^3-(n+1)+\dfrac{2}{3}$

n は整数であることより　$n^3-n+1\leqq f(x)\leqq(n+1)^3-(n+1)$

この範囲において，$f(x)$ の整数値の個数は

$\{(n+1)^3-(n+1)\}-(n^3-n+1)+1=3n(n+1)$

よって　$\boldsymbol{a_n=3n(n+1)}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{n}{3(n+1)}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　円 $C_1：x^2+y^2=25$ と円 $C_2：(x-10)^2+(y-5)^2=50$ の2つの交点と原点を通る円を C とする．次の問いに答えよ．

(1)　円 C の中心と半径を求めよ．

(2)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が円 C 上を動くとき，$2y-x$ の最大値を求めよ．

(3)　円 C_1 と円 C_2 の2つの交点を通る円の中心の軌跡を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 放物線 C：$y=x^2-4x+3$ と直線 l：$y=mx-m$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 放物線 C と直線 l が接するときの m の値 m_0 を求めよ．

(2) $m>m_0$ とする．放物線 C と直線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を D_1 とし，放物線 C と直線 l で囲まれた図形の面積を D_2 とする．D_1 と D_2 をそれぞれ m を用いて表せ．

(3) $m>m_0$ における D_2-2D_1 の最小値，およびそのときの m の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　総合問題(2)　　練習問題　解答

1　円 C_1：$x^2+y^2=25$ と円 C_2：$(x-10)^2+(y-5)^2=50$ の 2 つの交点と原点を通る円を C とする．次の問いに答えよ．

(1)　円 C の中心と半径を求めよ．

(2)　点 P$(x,\ y)$ が円 C 上を動くとき，$2y-x$ の最大値を求めよ．

(3)　円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点を通る円の中心の軌跡を求めよ．

解答例

(1)　2 円 C_1，C_2 の交点を通る図形は

$x^2+y^2-20x-10y+75+k(x^2+y^2-25)=0$　……①　(k：実数) と表される．

これが原点を通るとき　$75-25k=0$　より　$k=3$

よって，求める円 C の方程式は

$4x^2+4y^2-20x-10y=0$　　よって　$\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{125}{16}$

中心 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{4}\right)$，**半径** $\dfrac{5\sqrt{5}}{4}$

(2)　$2y-x=k$ とおき，$x-2y+k=0$ $\left(\text{傾き}\dfrac{1}{2}\text{の直線}\right)$ が円 C と共有点をもつときの k の最大値を求める．

C の中心 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{4}\right)$ と直線 $x-2y+k=0$ との距離と C の半径との関係より

$$\frac{\left|\dfrac{5}{2}-2\cdot\dfrac{5}{4}+k\right|}{\sqrt{1+4}}\leqq\frac{5\sqrt{5}}{4}$$

$$|k|\leqq\frac{25}{4}$$

よって　$-\dfrac{25}{4}\leqq k\leqq\dfrac{25}{4}$

したがって，求める最大値は $\dfrac{25}{4}$

(3)　2 円が異なる 2 交点 A，B をもつとき，その 2 円の中心はともに共通弦 AB の垂直二等分線上にある．よって求める円の中心の軌跡は，2 円 C_1，C_2 の共通弦の垂直二等分線である．

①が直線を表す式となるのは，$k=-1$ のときで

$-20x-10y+100=0$　より　$y=-2x+10$　　これがその共通弦の方程式

よって，求める軌跡は C_1 の中心 (0, 0) を通る傾き $\dfrac{1}{2}$ の直線　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　放物線 C：$y=x^2-4x+3$ と直線 l：$y=mx-m$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　放物線 C と直線 l が接するときの m の値 m_0 を求めよ．

(2)　$m>m_0$ とする．放物線 C と直線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を D_1 とし，放物線 C と直線 l で囲まれた図形の面積を D_2 とする．D_1 と D_2 をそれぞれ m を用いて表せ．

(3)　$m>m_0$ における D_2-2D_1 の最小値，およびそのときの m の値を求めよ．

解答例

(1)　C と l の方程式より

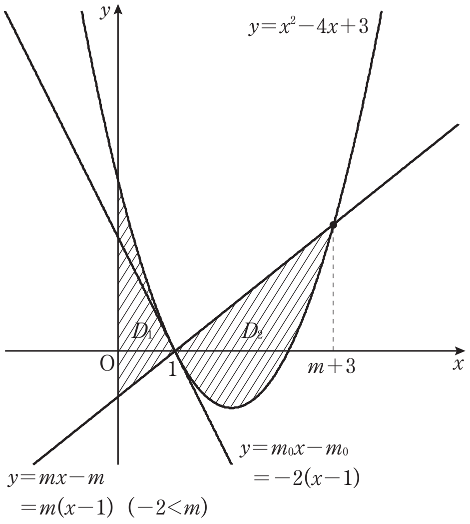
$x^2-4x+3=mx-m$　より　$x^2-(m+4)x+m+3=0$　……①

①の判別式を D とすると

$D=(m+4)^2-4(m+3)=(m+2)^2=0$

よって　$m=-2$

したがって　$\boldsymbol{m_0=-2}$



(2)　$D_1=\displaystyle\int_0^1\{x^2-4x+3-(mx-m)\}dx$

$=\left[\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{m+4}{2}x^2+(m+3)x\right]_0^1=\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}$

①の 2 実数解を α，β（$\alpha<\beta$）とすると

$D_2=\displaystyle\int_\alpha^\beta\{mx-m-(x^2-4x+3)\}dx$

$=-\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{6}(\sqrt{D})^3=\dfrac{1}{6}(m+2)^3$　（$m>-2$ より）

以上より　$\boldsymbol{D_1=\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}}$，　$\boldsymbol{D_2=\dfrac{1}{6}(m+2)^3}$

(3)　$D_2-2D_1=\dfrac{1}{6}(m+2)^3-2\left(\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}\right)$

$=\dfrac{1}{6}m^3+m^2+m-\dfrac{4}{3}=f(m)$　とおく．

$f'(m)=\dfrac{1}{2}m^2+2m+1=\dfrac{1}{2}(m^2+4m+2)$

m	-2	$\cdots$	$-2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(m)$		$-$	0	$+$
$f(m)$		↘		↗

$f'(m)=0$ となる m は　$m=-2+\sqrt{2}$　（$m>-2$ より）

$f(m)=f'(m)\cdot\left(\dfrac{1}{3}m+\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{2}{3}m-2$ より

求める最小値は　$f(-2+\sqrt{2})=-\dfrac{2}{3}(-2+\sqrt{2})-2=\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}(1+\sqrt{2})}$　（$\boldsymbol{m=-2+\sqrt{2}}$）

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。